Vorkurs Theoretische Informatik

Induktion und Einführung in die Grammatik

Arbeitskreis Theo-Vorkurs

Mittwoch, 11. Oktober 2023

Fachgruppe Informatik Universität Stuttgart

Aktuelle Folien:

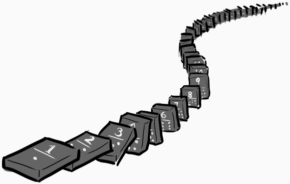
Übersicht

Vollständige Induktion

Idee

Zeige Aussagen der Form:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ***gilt...***

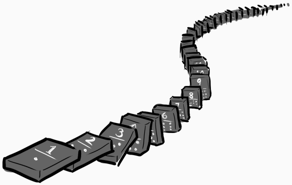
1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.



Idee

Zeige Aussagen der Form:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt...

1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
3. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.

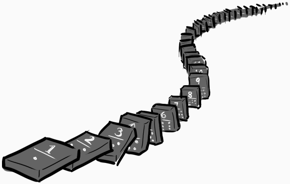


Idee

Zeige Aussagen der Form:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ***gilt...***

1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
3. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
4. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.

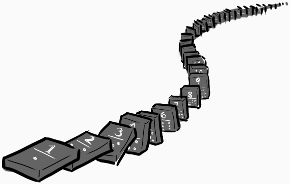


Idee

Zeige Aussagen der Form:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ***gilt...***

1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
3. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
4. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
5. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.

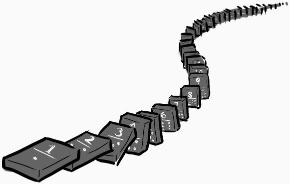


Idee

Zeige Aussagen der Form:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt...

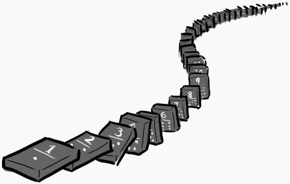
1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
3. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
4. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
5. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
6. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.



Idee

Zeige Aussagen der Form:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ***gilt...***

1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
3. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
4. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
5. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
6. Zeige, dass Aussage auch für das folgende Element gilt.
7. ...

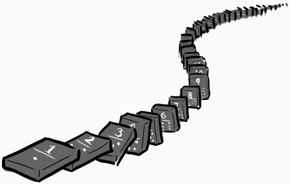


Idee

Zeige Aussagen der Form:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ***gilt...***

1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, wenn Aussage für beliebiges n gilt, gilt sie auch für dessen Nachfolger, also $n + 1$.

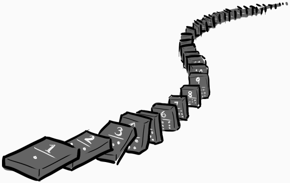


Idee

Zeige Aussagen der Form:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ***gilt…***

1. Zeige Aussage für das kleinste Element
2. Zeige, wenn Aussage für beliebiges n gilt, gilt sie auch für dessen Nachfolger, also $n + 1$.

3. $\rightsquigarrow$ Aussage gilt für alle n.



Struktur

Zeige Aussagen der Form:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt...

1. Induktionsanfang

   Zeige Aussage für das kleinste Element

2. Induktionsvoraussetzung

   Zeige, unter der Voraussetzung:

   die Aussage gelte für beliebiges n,...

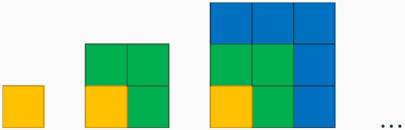
3. Induktionsschritt

   ...dann gilt die Aussage auch für dessen Nachfolger $n + 1$.

4. $\rightsquigarrow$ Aussage gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Beispiel

Zeigen Sie $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Induktionsanfang (IA)

Zeige Aussage gilt für $n := 0$:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{0}(2i+1) && \stackrel{!}{=} && (0+1)^2 & \\
\iff & 2 \cdot 0 + 1 && \stackrel{!}{=} && 1^2 & \\
\iff & 1 && = && 1 & \checkmark
\end{aligned}
$$

Beispiel

Zeigen Sie $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Induktionsanfang (IA)

Aussage gilt für $n := 0$, da $\sum_{i=0}^{0}(2i+1) = (0+1)^2.$

Induktionsvoraussetzung (IV)

Ang. Aussage gilt für (ein beliebiges aber festes) $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt (IS)

Zeige Aussage gilt für alle $n+1$ unter Nutzung der (IV):

$$\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) \overset{!}{=} ((n+1)+1)^2$$

Beispiel

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle $n + 1$ unter Nutzung der IV:

$$\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) \overset{!}{=} ((n+1)+1)^2$$

Beispiel

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle $n+1$ unter Nutzung der IV:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) && \stackrel{!}{=} && ((n+1)+1)^2 \\
\iff & \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + \sum_{i=n+1}^{n+1}(2i+1) && \stackrel{!}{=} && (n+2)^2
\end{aligned}
$$

Beispiel

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle $n + 1$ unter Nutzung der IV:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n+1} (2i+1) && \overset{!}{=} && ((n+1)+1)^2 \\
\iff & \sum_{i=0}^{n} (2i+1) + \sum_{i=n+1}^{n+1} (2i+1) && \overset{!}{=} && (n+2)^2 \\
\iff & \sum_{i=0}^{n} (2i+1) + (2(n+1)+1) && \overset{!}{=} && n^2 + 2 \cdot 2n + 2^2
\end{aligned}$$

Beispiel

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle $n+1$ unter Nutzung der IV:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) &&\overset{!}{=} &&((n+1)+1)^2\\
\iff\ &\sum_{i=0}^{n}(2i+1)+\sum_{i=n+1}^{n+1}(2i+1) &&\overset{!}{=} &&(n+2)^2\\
\iff\ &\sum_{i=0}^{n}(2i+1)+(2(n+1)+1) &&\overset{!}{=} &&n^2+2\cdot 2n+2^2\\
\overset{IV}{\iff}\ &(n+1)^2+(2(n+1)+1) &&\overset{!}{=} &&n^2+4n+4
\end{aligned}$$

Beispiel

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle $n+1$ unter Nutzung der IV:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) && \stackrel{!}{=} && ((n+1)+1)^2 \\
\iff & \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + \sum_{i=n+1}^{n+1}(2i+1) && \stackrel{!}{=} && (n+2)^2 \\
\iff & \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + (2(n+1)+1) && \stackrel{!}{=} && n^2 + 2 \cdot 2n + 2^2 \\
\stackrel{IV}{\iff} & (n+1)^2 + (2(n+1)+1) && \stackrel{!}{=} && n^2 + 4n + 4 \\
\iff & n^2 + 2n + 1^2 + 2n + 2 + 1 && \stackrel{!}{=} && n^2 + 4n + 4
\end{aligned}
$$

Beispiel

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für alle $n+1$ unter Nutzung der IV:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) && \overset{!}{=} && ((n+1)+1)^2 \\
\iff & \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + \sum_{i=n+1}^{n+1}(2i+1) && \overset{!}{=} && (n+2)^2 \\
\iff & \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + (2(n+1)+1) && \overset{!}{=} && n^2 + 2 \cdot 2n + 2^2 \\
\overset{IV}{\iff} & (n+1)^2 + (2(n+1)+1) && \overset{!}{=} && n^2 + 4n + 4 \\
\iff & n^2 + 2n + 1^2 + 2n + 2 + 1 && \overset{!}{=} && n^2 + 4n + 4 \\
\iff & n^2 + 4n + 4 && = && n^2 + 4n + 4
\end{aligned}
$$

Beispiel

Zeigen Sie $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Induktionsanfang (IA)

Aussage gilt für $n := 0$, da $\sum_{i=0}^{0}(2i+1) = 1^2$.

Induktionsvoraussetzung (IV)

Ang. Aussage gilt für (ein beliebiges aber festes) $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt (IS)

Aussage gilt für alle $n+1$ unter Nutzung der IV, da

$$\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) = ((n+1)+1)^2$$

$\leadsto$ Aussage gilt für alle n. $\square$

Denkpause

Aufgaben

Versuche dich an den folgenden Induktionsbeweisen.

Normal

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schwerer

$$\prod_{i=1}^{n} 4^i = 2^{n(n+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang (IA)

Aussage gilt für $n := 0$, da $\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

Induktionsvoraussetzung (IV)

Ang. Aussage gilt für $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt (IS)

Zeige Aussage gilt für alle $n+1$ unter Nutzung der IV:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i \overset{!}{=} \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2}$$

Lösungen: normale Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für $n + 1$ unter Nutzung der I.V.:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i \stackrel{!}{=} \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2}$$

Lösungen: normale Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für $n + 1$ unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i &\overset{!}{=} \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2} \\
\iff \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1) &\overset{!}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}
$$

Lösungen: normale Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für $n + 1$ unter Nutzung der I.V.:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n+1} i && \stackrel{!}{=} && \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2} \\
\iff & \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1) && \stackrel{!}{=} && \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
\iff & \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1) && \stackrel{!}{=} && \frac{n^2+3n+2}{2}
\end{aligned}$$

Lösungen: normale Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für $n + 1$ unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n+1} i && \overset{!}{=} && \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2} \\
\iff & \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1) && \overset{!}{=} && \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
\iff & \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1) && \overset{!}{=} && \frac{n^2+3n+2}{2} \\
\overset{IV}{\iff} & \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \overset{!}{=} && \frac{n^2+3n+2}{2}
\end{aligned}
$$

Lösungen: normale Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für $n+1$ unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n+1} i && \overset{!}{=} && \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2} \\
\iff & \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1) && \overset{!}{=} && \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
\iff & \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1) && \overset{!}{=} && \frac{n^2+3n+2}{2} \\
\overset{IV}{\iff} & \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \overset{!}{=} && \frac{n^2+3n+2}{2} \\
\iff & \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} && \overset{!}{=} && \frac{n^2+3n+2}{2}
\end{aligned}
$$

Lösungen: normale Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für $n+1$ unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n+1} i && \stackrel{!}{=} && \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2} \\
\iff & \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1) && \stackrel{!}{=} && \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
\iff & \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1) && \stackrel{!}{=} && \frac{n^2+3n+2}{2} \\
\stackrel{IV}{\iff} & \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \stackrel{!}{=} && \frac{n^2+3n+2}{2} \\
\iff & \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} && \stackrel{!}{=} && \frac{n^2+3n+2}{2} \\
\iff & \frac{n^2+3n+2}{2} && = && \frac{n^2+3n+2}{2}
\end{aligned}
$$

Lösungen: normale Aufgabe

Zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang (IA)

Aussage gilt für $n := 0$, da $\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

Induktionsvoraussetzung (IV)

Ang. Aussage gilt für $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt (IS)

Zeige Aussage gilt für $n+1$ unter Nutzung der IV:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i \stackrel{!}{=} \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2}$$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$\rightsquigarrow$ Aussage gilt für alle n. $\square$

Lösungen: schwerere Aufgabe

Zu zeigen: $\prod_{i=1}^{n} 4^i = 2^{n(n+1)}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Induktionsanfang (IA)

Aussage gilt für $n := 1$, da $\prod_{i=1}^{1} 4^i = 4^1 = 4 = 2^2 = 2^{1(1+1)}$.

Induktionsvoraussetzung (IV)

Ang. Aussage gilt für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Induktionsschritt (IS)

Zeige Aussage gilt für $n + 1$ unter Nutzung der IV:

$$\prod_{i=1}^{n+1} 4^i \overset{!}{=} 2^{(n+1)((n+1)+1)}$$

Lösungen: schwerere Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für $n + 1$ unter Nutzung der I.V.:

$$\prod_{i=1}^{n+1} 4^i \overset{!}{=} 2^{(n+1)((n+1)+1)}$$

Lösungen: schwerere Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für $n+1$ unter Nutzung der I.V.:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1} 4^i &\stackrel{!}{=} 2^{(n+1)((n+1)+1)} \\
\iff \left(\prod_{i=1}^{n} 4^i\right) \cdot 4^{(n+1)} &\stackrel{!}{=} 2^{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Lösungen: schwerere Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für $n + 1$ unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{n+1} 4^i && \overset{!}{=} && 2^{(n+1)((n+1)+1)} \\
\iff & \left(\prod_{i=1}^{n} 4^i\right) \cdot 4^{(n+1)} && \overset{!}{=} && 2^{(n+1)(n+2)} \\
\overset{IV}{\iff} & \left(2^{n(n+1)}\right) \cdot 4^{(n+1)} && \overset{!}{=} && 2^{n^2+3n+2}
\end{aligned}
$$

Lösungen: schwerere Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für $n + 1$ unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{n+1} 4^i && \overset{!}{=} && 2^{(n+1)((n+1)+1)} \\
\iff & \left(\prod_{i=1}^{n} 4^i\right) \cdot 4^{(n+1)} && \overset{!}{=} && 2^{(n+1)(n+2)} \\
\overset{IV}{\iff} & \left(2^{n(n+1)}\right) \cdot 4^{(n+1)} && \overset{!}{=} && 2^{n^2+3n+2} \\
\iff & 2^{n^2+n} \cdot 2^{2(n+1)} && \overset{!}{=} && 2^{n^2+3n+2}
\end{aligned}
$$

Lösungen: schwerere Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für $n + 1$ unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{n+1} 4^i && \overset{!}{=} && 2^{(n+1)((n+1)+1)} \\
\iff & \left(\prod_{i=1}^{n} 4^i\right) \cdot 4^{(n+1)} && \overset{!}{=} && 2^{(n+1)(n+2)} \\
\overset{IV}{\iff} & \left(2^{n(n+1)}\right) \cdot 4^{(n+1)} && \overset{!}{=} && 2^{n^2+3n+2} \\
\iff & 2^{n^2+n} \cdot 2^{2(n+1)} && \overset{!}{=} && 2^{n^2+3n+2} \\
\iff & 2^{n^2+n} \cdot 2^{2n+2} && \overset{!}{=} && 2^{n^2+3n+2}
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für $n + 1$ unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{n+1} 4^i && \overset{!}{=} && 2^{(n+1)((n+1)+1)} \\
\iff & \left(\prod_{i=1}^{n} 4^i\right) \cdot 4^{(n+1)} && \overset{!}{=} && 2^{(n+1)(n+2)} \\
\overset{IV}{\iff} & \left(2^{n(n+1)}\right) \cdot 4^{(n+1)} && \overset{!}{=} && 2^{n^2+3n+2} \\
\iff & 2^{n^2+n} \cdot 2^{2(n+1)} && \overset{!}{=} && 2^{n^2+3n+2} \\
\iff & 2^{n^2+n} \cdot 2^{2n+2} && \overset{!}{=} && 2^{n^2+3n+2} \\
\iff & 2^{(n^2+n)+(2n+2)} && \overset{!}{=} && 2^{n^2+3n+2}
\end{aligned}
$$

Lösungen: schwerere Aufgabe

Induktionsschritt

Zeige Aussage gilt für $n + 1$ unter Nutzung der I.V.:

$$
\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{n+1} 4^i && \overset{!}{=} && 2^{(n+1)((n+1)+1)} \\
\iff & \left(\prod_{i=1}^{n} 4^i\right) \cdot 4^{(n+1)} && \overset{!}{=} && 2^{(n+1)(n+2)} \\
\overset{IV}{\iff} & \left(2^{n(n+1)}\right) \cdot 4^{(n+1)} && \overset{!}{=} && 2^{n^2+3n+2} \\
\iff & 2^{n^2+n} \cdot 2^{2(n+1)} && \overset{!}{=} && 2^{n^2+3n+2} \\
\iff & 2^{n^2+n} \cdot 2^{2n+2} && \overset{!}{=} && 2^{n^2+3n+2} \\
\iff & 2^{(n^2+n)+(2n+2)} && \overset{!}{=} && 2^{n^2+3n+2} \\
\iff & 2^{n^2+3n+2} && = && 2^{n^2+3n+2}
\end{aligned}
$$

Lösungen: schwerere Aufgabe

Zu zeigen: $\prod_{i=1}^{n} 4^i = 2^{n(n+1)}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Induktionsanfang (IA)

Aussage gilt für $n := 1$, da $\prod_{i=1}^{1} 4^i = 4^1 = 4 = 2^2 = 2^{1(1+1)}$.

Induktionsvoraussetzung (IV)

Ang. Aussage gilt für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Induktionsschritt (IS)

Zeige Aussage gilt für $n + 1$ unter Nutzung der IV:

$$\prod_{i=1}^{n+1} 4^i \stackrel{!}{=} 2^{(n+1)((n+1)+1)} \text{ gilt für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$\rightsquigarrow$ Aussage gilt für alle n. $\square$

Murmelpause

Definition nochmal formaler

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : P(n)) \iff (P(n_0) \land \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : (P(n) \implies P(n+1)))$$

Definition nochmal formaler

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : P(n)) \iff (\underbrace{P(n_0)}_{\text{IA}} \land \overbrace{\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : (\underbrace{P(n)}_{\text{IV}} \implies P(n+1))}^{\text{IS}})$$

Definition nochmal formaler

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : P(n)) \iff (\underbrace{P(n_0)}_{\text{IA}}) \wedge \overbrace{\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : (\underbrace{P(n)}_{\text{IV}} \implies P(n+1))}^{\text{IS}})$$

1. **IA:** $n = n_0$

Definition nochmal formaler

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : P(n)) \iff \underbrace{(P(n_0)}_{\text{IA}} \land \overbrace{\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : (\underbrace{P(n)}_{\text{IV}} \implies P(n+1))}^{\text{IS}})$$

1. **IA:** $n = n_0$
2. **IS:** Sei $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ beliebig.

Definition nochmal formaler

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : P(n)) \iff (\underbrace{P(n_0)}_{\text{IA}} \wedge \overbrace{\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : (\underbrace{P(n)}_{\text{IV}} \implies P(n+1))}^{\text{IS}})$$

1. **IA:** $n = n_0$
2. **IS:** Sei $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ beliebig. Ang. es gilt $P(n)$. **(IV)**

Definition nochmal formaler

$$(\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : P(n)) \iff (\underbrace{P(n_0)}_{\text{IA}} \land \overbrace{\forall n \in \mathbb{N}_{n_0} : (\underbrace{P(n)}_{\text{IV}} \implies P(n+1))}^{\text{IS}})$$

1. **IA:** $n = n_0$
2. **IS:** Sei $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ beliebig. Ang. es gilt $P(n)$. **(IV)**
3. Zeigen, dass $P(n+1)$ gilt, unter Verwendung von $P(n)$ **(IV)**

Aufgabe

Die folgende Induktion zeigt eine seltsame Aussage.

Ist der Beweis korrekt geführt? Was ist passiert?

Sei $A(n)$:= *In einer Herde aus n Telefonen haben alle die selbe Farbe.*

Zu zeigen: $A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Induktionsanfang (IA)

$A(1)$: Aussage gilt für $n := 1$, da ein Telefon nur eine Farbe haben kann.

Induktionsvoraussetzung (IV)

Ang. $A(n)$ gilt für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

Induktionsschritt (IS)

Zeige Aussage gilt für alle $n + 1$ unter Nutzung der IV:

D.h. wir zeigen $A(n+1) =$ *In einer Herde aus* $n+1$ *Telefonen haben alle die selbe Farbe.*

Induktionsschritt (IS)

Wir betrachten eine Herde aus $n+1$ Telefonen:

$$\underbrace{☎☎☎☎☎\ldots☎☎}_{n+1}$$

Wir sondern ein Telefon aus und betrachten den Rest. Nach I.V. haben diese alle die selbe Farbe.

$$\underbrace{☎☎☎☎☎\ldots☎}_{n}☎$$

Jetzt sondern wir ein anderes Telefon aus.

$$☎\underbrace{☎☎☎☎\ldots☎☎}_{n}$$

Die übrigen n Telefone haben nach I.V. wieder die selbe Farbe.

$$\underbrace{☎☎☎☎☎\ldots☎☎}_{n+1}$$

Also haben alle $n+1$ Telefone die selbe Farbe. $\rightsquigarrow A(n)$ gilt für alle n.

Das Problem

Für $A(n+1)$ wird angenommen, dass beide Herden der n Telefone mindestens ein gemeinsames Element haben. Sie teilen dann die Farbe dieses Elements.

Das Problem ist, dass $A(1) \implies A(2)$ nicht zwangsweise erfüllt sein muss! Somit können wir keine weiteren Folgerungen über $A(n+1)$ mit $n \geq 2$ machen.

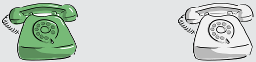


Abbildung 1: Beide Telefone erfüllen jeweils $A(1)$, zusammen aber nicht $A(2)$

Denn es gibt ein überlappendes Element erst ab $n+1 = 3$ Telefonen:

$$A(3) : \underset{A(2)}{\overset{A(2)}{☎\ ☎☎}} \rightsquigarrow A(4) : \underset{A(3)}{\overset{A(3)}{☎☎☎☎}} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow A(n+1) : \underset{A(n)}{\overset{A(n)}{☎☎\ldots☎☎}}$$

Murmelpause

Grammatiken

Wörter in Sprachen

Wir können inzwischen Sprachen in Mengenschreibweise darstellen.
Es gibt aber auch weitere Möglichkeiten Sprachen zu definieren.

Wir können Regeln formulieren mit denen wir alle Wörter einer Sprache schrittweise erzeugen können.

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$

Hier ist z.B. ww^R = $ababbbbaba \in L$.

w^R ist w rückwärts

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = $ababbbbaba \in L$.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S.

w^R ist w rückwärts

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. $ww^R = ababbbbaba \in L$.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S.
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln:

w^R ist w rückwärts

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = $ababbbbaba \in L$.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S.
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln:

$$S \longrightarrow aSa \text{ oder } S \longrightarrow bSb$$

$$\text{oder } S \longrightarrow aa \text{ oder } S \longrightarrow bb$$

w^R ist w rückwärts

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = $ababbbbaba \in L$.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S.
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln:

$$S \longrightarrow aSa \text{ oder } S \longrightarrow bSb$$
$$\text{oder } S \longrightarrow aa \text{ oder } S \longrightarrow bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben:
   z.B.: $ababbbbaba \leadsto S$

w^R ist w rückwärts

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w \in \{a,b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. $ww^R = ababbbbaba \in L$.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S.
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln:

$$S \longrightarrow aSa \text{ oder } S \longrightarrow bSb$$
$$\text{oder } S \longrightarrow aa \text{ oder } S \longrightarrow bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben:
   z.B.: $ababbbbaba \rightsquigarrow aSa$

w^R ist w rückwärts

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w \in \{a,b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. $ww^R = ababbbbaba \in L$.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S.
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln:

$$S \longrightarrow aSa \text{ oder } S \longrightarrow bSb$$

$$\text{oder } S \longrightarrow aa \text{ oder } S \longrightarrow bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben:
   z.B.: $ababbbbaba \rightsquigarrow \text{a}bSba$

w^R ist w rückwärts

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. $ww^R = ababbbbaba \in L$.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S.
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln:

$$S \longrightarrow aSa \text{ oder } S \longrightarrow bSb$$
$$\text{oder } S \longrightarrow aa \text{ oder } S \longrightarrow bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben:
   z.B.: $ababbbbaba \rightsquigarrow abaSaba$

w^R ist w rückwärts

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. $ww^R = ababbbbaba \in L$.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S.
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln:

$$S \longrightarrow aSa \text{ oder } S \longrightarrow bSb$$

$$\text{oder } S \longrightarrow aa \text{ oder } S \longrightarrow bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben:
   z.B.: $ababbbbaba \rightsquigarrow ababSbaba$

w^R ist w rückwärts

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. $ww^R = ababbbbaba \in L$.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S.
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln:

$$S \longrightarrow aSa \text{ oder } S \longrightarrow bSb$$

$$\text{oder } S \longrightarrow aa \text{ oder } S \longrightarrow bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben:
   z.B.: $ababbbbaba \rightsquigarrow ababbbbaba$

w^R ist w rückwärts

Beispiel Worterzeugung

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^n, n > 0, n \in \mathbb{N}\}$
Hier ist z.B. ww^R = *ababbbbaba* $\in L$.

1. Wir beginnen mit einer Variablen S.
2. Wir formulieren Regeln um S umzuwandeln:

$$S \longrightarrow aSa \text{ oder } S \longrightarrow bSb$$

$$\text{oder } S \longrightarrow aa \text{ oder } S \longrightarrow bb$$

3. Damit können wir jetzt Wörter aus der Sprache beschreiben:
   z.B.: *ababbbbaba* $\rightsquigarrow$ *ababbbbaba*
4. Wir nennen diese Umformungsregeln Produktionsregeln.

w^R ist w rückwärts

Produktionsregeln

Einschränkungen

- *Nichtterminale* werden meist durch Großbuchstaben repräsentiert und müssen durch Produktionsregeln abgeändert werden.
- *Terminale* werden meist durch Kleinbuchstaben repräsentiert und sollten *nicht* durch weitere Produktionsregeln abgeändert werden.
- Mehrere Symbole können auf einen Schlag überführt werden. Dabei sollten die Terminale nicht entfernt oder umsortiert werden.
  z.B. $AB \longrightarrow CD$ ist erlaubt.
  Auch $abAB \longrightarrow BbAa$, aber das gehört sich nicht.

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$
$P = \{S \longrightarrow aS$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid \varepsilon\}$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid \varepsilon\}$

$L_2 = \{a, b\}^*$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid \varepsilon\}$

$L_2 = \{a, b\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid \varepsilon\}$

$L_2 = \{a, b\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid bS$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid \varepsilon\}$

$L_2 = \{a, b\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid bS \mid \varepsilon\}$

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid \varepsilon\}$

$L_2 = \{a, b\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid bS \mid \varepsilon\}$

$L_3 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid \varepsilon\}$

$L_2 = \{a, b\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid bS \mid \varepsilon\}$

$L_3 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

$P = \{S \longrightarrow ABC,$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid \varepsilon\}$

$L_2 = \{a, b\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid bS \mid \varepsilon\}$

$L_3 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

$$P = \{S \longrightarrow ABC,$$
$$A \longrightarrow aA \mid \varepsilon,$$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid \varepsilon\}$

$L_2 = \{a, b\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid bS \mid \varepsilon\}$

$L_3 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\longrightarrow ABC, \\
A &\longrightarrow aA \mid \varepsilon, \\
B &\longrightarrow bb,
\end{aligned}
$$

Weitere Beispiele für Produktionen

Aufgaben

Gesucht: Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

$L_1 = \{a\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid \varepsilon\}$

$L_2 = \{a, b\}^*$

$P = \{S \longrightarrow aS \mid bS \mid \varepsilon\}$

$L_3 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\longrightarrow ABC,\\
A &\longrightarrow aA \mid \varepsilon,\\
B &\longrightarrow bb,\\
C &\longrightarrow cC \mid \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

Denkpause

Aufgaben

Findet Produktionsregeln für die folgenden Sprachen.

Normal

- $L_1 = \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
- $L_3 = \{uv \mid u \in \{a, b\}^*, v \in \{c, d\}\}$
- $L_4 = \{w \mid |w| = 3, w \in \{a, b, c\}^*\}$

Etwas Schwerer

- $L_5 = \{a^n \mid n \equiv 1 \mod 3\}$
- $L_6 = \{w \mid |w|_a = 3, |w|_b = 1, w \in \{a, b, c\}^*\}$
- $L_7 = \{uv \mid u \in \{◀, ▲, ▶, ▼\}^*, v \in \{🛑\}\}$
- $L_8 = \{w \mid |w| = 2, w \in \{a, b\}\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \longrightarrow aaS \mid \varepsilon\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \longrightarrow aaS \mid \varepsilon\}$
- $P_2 = \{S \longrightarrow AB, A \longrightarrow aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \longrightarrow cB \mid \varepsilon\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \longrightarrow aaS \mid \varepsilon\}$
- $P_2 = \{S \longrightarrow AB, A \longrightarrow aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \longrightarrow cB \mid \varepsilon\}$
- $P_3 = \{S \longrightarrow UV, U \longrightarrow aU \mid bU \mid \varepsilon, V \longrightarrow c \mid d\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \longrightarrow aaS \mid \varepsilon\}$
- $P_2 = \{S \longrightarrow AB, A \longrightarrow aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \longrightarrow cB \mid \varepsilon\}$
- $P_3 = \{S \longrightarrow UV, U \longrightarrow aU \mid bU \mid \varepsilon, V \longrightarrow c \mid d\}$
- $P_4 = \{S \longrightarrow XXX, X \longrightarrow a \mid b \mid c\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \longrightarrow aaS \mid \varepsilon\}$
- $P_2 = \{S \longrightarrow AB, A \longrightarrow aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \longrightarrow cB \mid \varepsilon\}$
- $P_3 = \{S \longrightarrow UV, U \longrightarrow aU \mid bU \mid \varepsilon, V \longrightarrow c \mid d\}$
- $P_4 = \{S \longrightarrow XXX, X \longrightarrow a \mid b \mid c\}$
- $P_5 = \{S \longrightarrow a \mid aaaS\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \longrightarrow aaS \mid \varepsilon\}$
- $P_2 = \{S \longrightarrow AB, A \longrightarrow aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \longrightarrow cB \mid \varepsilon\}$
- $P_3 = \{S \longrightarrow UV, U \longrightarrow aU \mid bU \mid \varepsilon, V \longrightarrow c \mid d\}$
- $P_4 = \{S \longrightarrow XXX, X \longrightarrow a \mid b \mid c\}$
- $P_5 = \{S \longrightarrow a \mid aaaS\}$
- $P_6 = \{S \longrightarrow AAAB, AB \longrightarrow BA, A \longrightarrow cA \mid Ac \mid a, B \longrightarrow cB \mid Bc \mid b\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \longrightarrow aaS \mid \varepsilon\}$
- $P_2 = \{S \longrightarrow AB, A \longrightarrow aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \longrightarrow cB \mid \varepsilon\}$
- $P_3 = \{S \longrightarrow UV, U \longrightarrow aU \mid bU \mid \varepsilon, V \longrightarrow c \mid d\}$
- $P_4 = \{S \longrightarrow XXX, X \longrightarrow a \mid b \mid c\}$
- $P_5 = \{S \longrightarrow a \mid aaaS\}$
- $P_6 = \{S \longrightarrow AAAB, AB \longrightarrow BA, A \longrightarrow cA \mid Ac \mid a, B \longrightarrow cB \mid Bc \mid b\}$
- $P_7 = \{S \longrightarrow U$🛑 $\mid$ 🛑$, U \longrightarrow \blacktriangleleft U \mid \blacktriangle U \mid \blacktriangleright U \mid \blacktriangledown U \mid \varepsilon\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $P_1 = \{S \longrightarrow aaS \mid \varepsilon\}$
- $P_2 = \{S \longrightarrow AB, A \longrightarrow aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \longrightarrow cB \mid \varepsilon\}$
- $P_3 = \{S \longrightarrow UV, U \longrightarrow aU \mid bU \mid \varepsilon, V \longrightarrow c \mid d\}$
- $P_4 = \{S \longrightarrow XXX, X \longrightarrow a \mid b \mid c\}$
- $P_5 = \{S \longrightarrow a \mid aaaS\}$
- $P_6 = \{S \longrightarrow AAAB, AB \longrightarrow BA, A \longrightarrow cA \mid Ac \mid a, B \longrightarrow cB \mid Bc \mid b\}$
- $P_7 = \{S \longrightarrow U\text{STOP} \mid \text{STOP}, U \longrightarrow \blacktriangleleft U \mid \blacktriangle U \mid \blacktriangleright U \mid \blacktriangledown U \mid \varepsilon\}$
- $P_8 = \{\} \rightsquigarrow$ Wir brauchen keine Produktionsregeln!

Murmelpause

Formale Notation

Wir beschreiben eine *Grammatik* durch ein geordnetes *Tupel* $G = (V, \Sigma, P, S)$

- V ist die Menge der verwendeten Nichtterminale
- Σ die Menge der Terminale bzw. unser Alphabet
- P ist die Menge der Produktionsregeln
- S ist die Startvariable

Beispiel für L = $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^n,\ n \geq 1\}$

$G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$P = \{S \longrightarrow aSa, S \longrightarrow bSb, S \longrightarrow aa, S \longrightarrow bb\}$

bzw. kurz: $P = \{S \longrightarrow aSa \mid bSb \mid aa \mid bb\}$

Denkpause

Knifflige Aufgabe

Bob will durch das Labyrinth laufen. Er hat folgende Möglichkeiten:

$\Sigma = \{\blacktriangleleft, \blacktriangle, \blacktriangleright, \blacktriangledown\}$

- Bob kann nicht auf ein Feld zurücktreten, von dem er gerade kam
- Bob geht bei jedem Schritt ein Feld in die angegebene Richtung

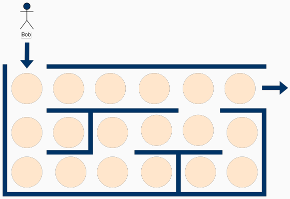


Abbildung 2: Bobs Problem

Geben Sie eine Grammatik an, welche die Sprache beschreibt, die Bob durch alle ihm möglichen Wege des Labyrinths führt.

Denkpause

Beispiel

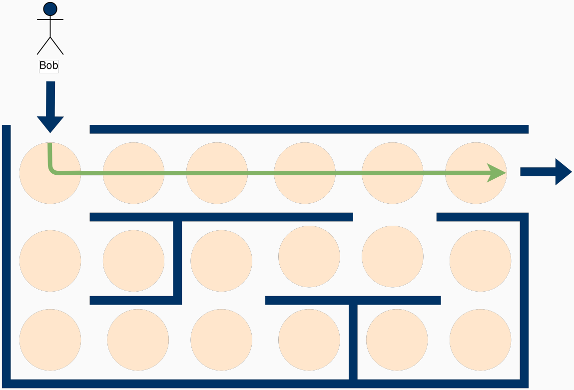


Abbildung 3: Der direkte Weg ist repräsentiert durch das Wort ▼▶▶▶▶▶▶

Lösung

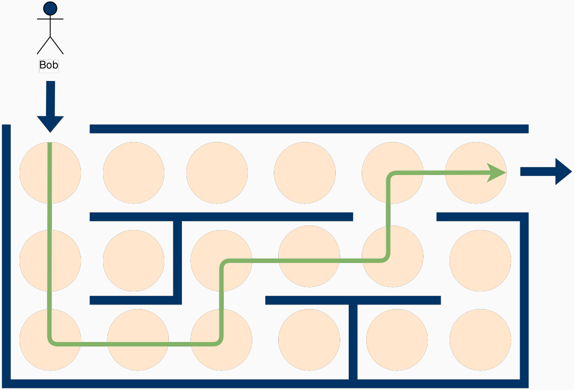


Abbildung 4: Indirekter Weg

Lösung

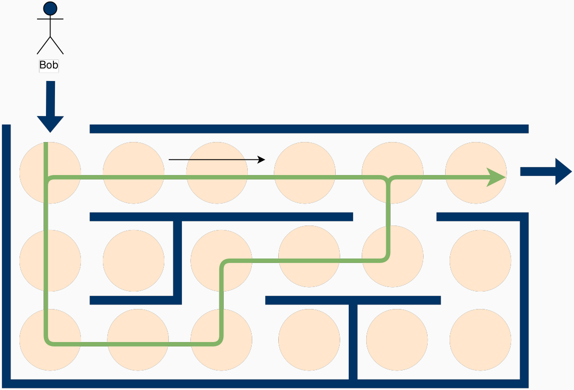


Abbildung 4: Schlaufe Uhrzeigersinn

Lösung

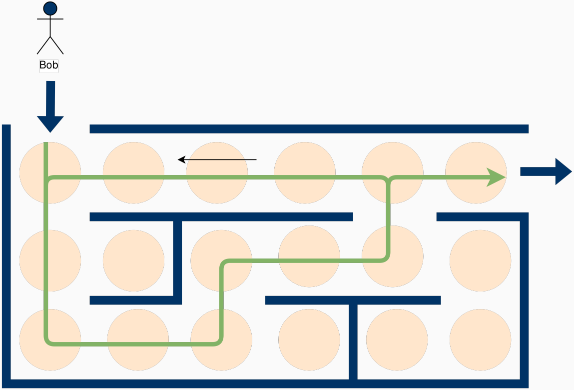


Abbildung 4: Schlaufe gegen Uhrzeigersinn

Lösung

Eine Möglichkeit:

$G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

$V = \{S, A_u, A_r, B_u, B_l\}$

$\Sigma = \{\blacktriangleleft, \blacktriangle, \blacktriangleright, \blacktriangledown\}$

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\longrightarrow \blacktriangledown A_u \mid \blacktriangledown A_r, \\
A_u &\longrightarrow \blacktriangleright\blacktriangleright\blacktriangleright\blacktriangleright B_l \\
A_r &\longrightarrow \blacktriangledown\blacktriangledown\blacktriangleright\blacktriangleright\blacktriangle\blacktriangleright\blacktriangleright\blacktriangle B_u, \\
B_l &\longrightarrow \blacktriangledown\blacktriangleleft\blacktriangleleft\blacktriangledown\blacktriangleleft\blacktriangleleft\blacktriangle\blacktriangle A_u \mid \blacktriangleright\blacktriangleright, \\
B_u &\longrightarrow \blacktriangleleft\blacktriangleleft\blacktriangleleft\blacktriangleleft A_r \mid \blacktriangleright\blacktriangleright\}
\end{aligned}
$$

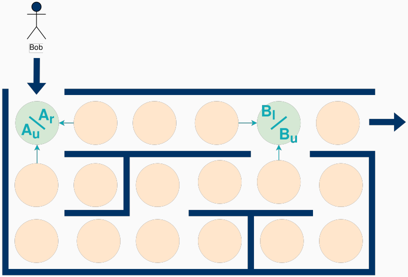


Abbildung 5: Es muss unterschieden werden, ob Bob von links, rechts oder unten kam

Erinnerung: Bob kann nicht auf ein Feld zurücktreten, von dem er gerade kam

Ableiten

Wir können durch das Ableiten formal zeigen, dass ein Wort von einer Grammatik erzeugt wird:

Wir betrachten L = $\{ww^R \mid w^R$ ist w rückwärts, $w \in \{a, b\}^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

mit der Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

$V = \{S\}, \Sigma = \{a, b\}, P = \{S \longrightarrow aSa \mid bSb \mid aa \mid bb\}$

Beispiel

Wir zeigen $ww^R = ababbbbaba \in$ L.

$S \Longrightarrow_G aSa \Longrightarrow_G abSba \Longrightarrow_G abaSaba \Longrightarrow_G ababSbaba$

$\Longrightarrow_G ababbbbaba$

$\square$

Denkpause

Aufgaben

Zeige die folgenden Aussagen

Normal

- $G_1 = (\{S\}, \{a\}, P_1, S)$ erzeugt $aaaa$
  mit $P_1 = \{S \longrightarrow aaS \mid \varepsilon\}$
- $G_2 = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P_2, S)$ erzeugt $aabbc$
  mit $P_2 = \{S \longrightarrow AB, A \longrightarrow aAb \mid ab \mid \varepsilon, B \longrightarrow cB \mid \varepsilon\}$
- $G_3 = (\{S, U, V\}, \{a, b, c, d\}, P_3, S)$ erzeugt $abac$
  mit $P_3 = \{S \longrightarrow UV, U \longrightarrow aU \mid bU \mid \varepsilon, V \longrightarrow c \mid d\}$
- $G_4 = (\{S, X\}, \{a, b, c\}, P_4, S)$ erzeugt aac
  mit $P_4 = \{S \longrightarrow XXX, X \longrightarrow a \mid b \mid c\}$

Denkpause

Aufgaben

Zeige die folgenden Aussagen

Etwas Schwerer

- $G_5 = (\{S\}, \{a\}, P_5, S)$ erzeugt $aaaa$
  mit $P_5 = \{S \longrightarrow a \mid aaaS\}$
- $G_6 = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P_6, S)$ erzeugt $cabcacca$
  mit $P_6 = \{S \longrightarrow AAAB, AB \longrightarrow BA, A \longrightarrow cA \mid Ac \mid a, B \longrightarrow cB \mid Bc \mid b\}$
- $G_7 = (\{S, U\}, \{\text{STOP}, \blacktriangleleft, \blacktriangle, \blacktriangleright, \blacktriangledown\}, P_7, S)$ erzeugt $\blacktriangleright\text{STOP}$
  mit $P_7 = \{S \longrightarrow U\text{STOP} \mid \text{STOP}, U \longrightarrow \blacktriangleleft U \mid \blacktriangle U \mid \blacktriangleright U \mid \blacktriangledown U \mid \varepsilon\}$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $S \Longrightarrow_{G_1} aaS \Longrightarrow_{G_1} aaaaS \Longrightarrow_{G_1} aaaa$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $S \Longrightarrow_{G_1} aaS \Longrightarrow_{G_1} aaaaS \Longrightarrow_{G_1} aaaa$
- $S \Longrightarrow_{G_2} AB \Longrightarrow_{G_2} aAbB \Longrightarrow_{G_2} aabbB \Longrightarrow_{G_2} aabbcB \Longrightarrow_{G_2} aabbc$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $S \Longrightarrow_{G_1} aaS \Longrightarrow_{G_1} aaaaS \Longrightarrow_{G_1} aaaa$
- $S \Longrightarrow_{G_2} AB \Longrightarrow_{G_2} aAbB \Longrightarrow_{G_2} aabbB \Longrightarrow_{G_2} aabbcB \Longrightarrow_{G_2} aabbc$
- $S \Longrightarrow_{G_3} UV \Longrightarrow_{G_3} aUV \Longrightarrow_{G_3} abUV \Longrightarrow_{G_3} abaUV \Longrightarrow_{G_3} abaV \Longrightarrow_{G_3} abac$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $S \Longrightarrow_{G_1} aaS \Longrightarrow_{G_1} aaaaS \Longrightarrow_{G_1} aaaa$
- $S \Longrightarrow_{G_2} AB \Longrightarrow_{G_2} aAbB \Longrightarrow_{G_2} aabbB \Longrightarrow_{G_2} aabbcB \Longrightarrow_{G_2} aabbc$
- $S \Longrightarrow_{G_3} UV \Longrightarrow_{G_3} aUV \Longrightarrow_{G_3} abUV \Longrightarrow_{G_3} abaUV \Longrightarrow_{G_3} abaV \Longrightarrow_{G_3} abac$
- $S \Longrightarrow_{G_4} XXX \Longrightarrow_{G_4} aXX \Longrightarrow_{G_4} aaX \Longrightarrow_{G_4} aac$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $S \Longrightarrow_{G_1} aaS \Longrightarrow_{G_1} aaaaS \Longrightarrow_{G_1} aaaa$
- $S \Longrightarrow_{G_2} AB \Longrightarrow_{G_2} aAbB \Longrightarrow_{G_2} aabbB \Longrightarrow_{G_2} aabbcB \Longrightarrow_{G_2} aabbc$
- $S \Longrightarrow_{G_3} UV \Longrightarrow_{G_3} aUV \Longrightarrow_{G_3} abUV \Longrightarrow_{G_3} abaUV \Longrightarrow_{G_3} abaV \Longrightarrow_{G_3} abac$
- $S \Longrightarrow_{G_4} XXX \Longrightarrow_{G_4} aXX \Longrightarrow_{G_4} aaX \Longrightarrow_{G_4} aac$
- $S \Longrightarrow_{G_5} aaaS \Longrightarrow_{G_5} aaaa$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $S \Rightarrow_{G_1} aaS \Rightarrow_{G_1} aaaaS \Rightarrow_{G_1} aaaa$
- $S \Rightarrow_{G_2} AB \Rightarrow_{G_2} aAbB \Rightarrow_{G_2} aabbB \Rightarrow_{G_2} aabbcB \Rightarrow_{G_2} aabbc$
- $S \Rightarrow_{G_3} UV \Rightarrow_{G_3} aUV \Rightarrow_{G_3} abUV \Rightarrow_{G_3} abaUV \Rightarrow_{G_3} abaV \Rightarrow_{G_3} abac$
- $S \Rightarrow_{G_4} XXX \Rightarrow_{G_4} aXX \Rightarrow_{G_4} aaX \Rightarrow_{G_4} aac$
- $S \Rightarrow_{G_5} aaaS \Rightarrow_{G_5} aaaa$
- $S \Rightarrow_{G_6} AAAB \Rightarrow_{G_6} AABA \Rightarrow_{G_6} ABAA \Rightarrow_{G_6} cABAA \Rightarrow_{G_6} caBAA \Rightarrow_{G_6} cabAA \Rightarrow_{G_6} cabcAA \Rightarrow_{G_6} cabcaA \Rightarrow_{G_6} cabcacA \Rightarrow_{G_6} cabcaccA \Rightarrow_{G_6} cabcacca$

Lösungen

Alle Lösungen sind Beispiellösungen, es sind auch andere möglich.

- $S \Longrightarrow_{G_1} aaS \Longrightarrow_{G_1} aaaaS \Longrightarrow_{G_1} aaaa$
- $S \Longrightarrow_{G_2} AB \Longrightarrow_{G_2} aAbB \Longrightarrow_{G_2} aabbB \Longrightarrow_{G_2} aabbcB \Longrightarrow_{G_2} aabbc$
- $S \Longrightarrow_{G_3} UV \Longrightarrow_{G_3} aUV \Longrightarrow_{G_3} abUV \Longrightarrow_{G_3} abaUV \Longrightarrow_{G_3} abaV \Longrightarrow_{G_3} abac$
- $S \Longrightarrow_{G_4} XXX \Longrightarrow_{G_4} aXX \Longrightarrow_{G_4} aaX \Longrightarrow_{G_4} aac$
- $S \Longrightarrow_{G_5} aaaS \Longrightarrow_{G_5} aaaa$
- $S \Longrightarrow_{G_6} AAAB \Longrightarrow_{G_6} AABA \Longrightarrow_{G_6} ABAA \Longrightarrow_{G_6} cABAA \Longrightarrow_{G_6} caBAA \Longrightarrow_{G_6} cabAA \Longrightarrow_{G_6} cabcAA \Longrightarrow_{G_6} cabcaA \Longrightarrow_{G_6} cabcacA \Longrightarrow_{G_6} cabcaccA \Longrightarrow_{G_6} cabcacca$
- $S \Longrightarrow_{G_7} U\text{STOP} \Longrightarrow_{G_7} \blacktriangleright U\text{STOP} \Longrightarrow_{G_7} \blacktriangleright \text{STOP}$

Wiederholung

Das können wir jetzt beantworten

Vollständige Induktion

- Was ist die Idee der Induktion?
- Welche Schritte hat die Induktion?
- Für welche Aussagen ist die Induktion geeignet?

Das können wir jetzt beantworten

Grammatiken

- Was sind Grammatiken?
- Was ist der Zusammenhang zwischen Grammatiken und Sprachen?
- Was sind Nichtterminale?
- Was sind Terminale?
- Bilden einer Grammatik für gegebene Sprache
- Wie finde ich raus, ob ein Wort von einer Grammatik erzeugt wird?

Noch Fragen?

Glossar

Abk.	Bedeutung	Was?!
$A \subseteq B$	Teilmenge	Alle Elemente aus A sind auch in B enthalten. Dabei können die Mengen auch gleich sein.
$A \subsetneq B$	echte Teilmenge	Alle Elemente aus A sind auch in B enthalten. Jedoch enthält B noch Elemente, die nicht in A enthalten sind. $\implies$ Mengen sind nicht gleich!
$A \subset B$	Teilmenge *oder* echte Teilmenge	Bei manchen Leuten $\subseteq$, bei manchen $\subsetneq$. Mehrdeutig, lieber nicht verwenden!

Lizenz

- Unsere Folien sind frei!
- Jeder darf die Folien unter den Bedingungen der **GNU General Public License v3** (oder jeder späteren Version) weiterverwenden.
- Ihr findet den Quelltext unter `https://www.github.com/FIUS/theo-vorkurs-folien`

Online-Whiteboard